ECOLE CENTRALE DES ARTS ET MANUFACTURES — ECOLE SUPERIEURE D'ELECTRICITE
ECOLE CENTRALE DE LYON — ECOLE SUPERIEURE D'OPTIQUE

Concours d'admission 1983

P'

MATHEMATIQUES I

(3 pages dactylographiées)

N.B. 1. Les résultats de la partie préliminaire et de la partie I pourront être utilisés par la suite, même si le candidat ne les a pas justifiés.
N.B. 2. Les parties II et III sont indépendantes l'une de l'autre.
N.B. 3. On admettra que toute injection continue d'un intervalle de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est strictement monotone.

*****

Dans tout le problème, on donne un intervalle I de $\mathbb{R}$ non réduit à un point et on note E le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des applications continues de I dans $\mathbb{C}$.
Un sous espace vectoriel F de E est dit **acceptable** si, et seulement s'il vérifie les deux conditions suivantes :

i) Tout élément de F est continûment dérivable ;

ii) Pour tout $x_0 \in I$, l'application S_{x_0} qui à $f \in F$ associe l'élément $(f(x_0), f'(x_0))$ de $\mathbb{C}^2$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels de F sur $\mathbb{C}^2$.

PARTIE PRELIMINAIRE

P.1. Soit $A = [a_{ij}]$ une matrice carrée d'ordre 2 sur $\mathbb{C}$. Vérifier :

$$A^2 = (\text{tr } A)\, A - (\text{dét } A)\, U$$

où l'on désigne par tr A la somme $a_{11} + a_{22}$, par dét A le déterminant de A, et par U la matrice-unité d'ordre 2.

P.2. Soit φ une application continue et croissante d'un segment I de $\mathbb{R}$ dans lui-même. Montrer que, pour tout $x \in I$, la suite $(\varphi^n(x))_{n \in \mathbb{N}}$, où φ^0 désigne l'application identique de I et où $\varphi^{n+1} = \varphi \circ \varphi^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, admet une limite L. Que peut-on dire de $\varphi(L)$?

PARTIE I

I-1. Soit F un sous-espace vectoriel acceptable de E.

a) Que peut-on dire de la dimension de F ?

b) A tout $(f,g) \in F \times F$ on associe l'application $W_{f,g}$ de I dans $\mathbb{C}$ telle que : $x \longmapsto f(x)g'(x) - f'(x)g(x)$

Montrer que, ou bien cette application est nulle, ou bien elle ne prend pas la valeur 0.

Donner, à l'aide de $W_{f,g}$, une condition nécessaire et suffisante pour que (f,g) soit une base de F.
En déduire que s'il existe $x_0 \in I$ tel que $f(x_0) = g(x_0) = 0$, alors la famille (f,g) est liée.

I-2. Soient f et g deux applications continûment dérivables de I dans $\mathbb{C}$ et F le sous-espace vectoriel de E engendré par (f,g). Donner à l'aide de $W_{f,g}$, une condition nécessaire et suffisante pour que F soit acceptable.

I-3. Soient F un sous-espace vectoriel acceptable de E, et f un élément non nul de F. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ n'a qu'un nombre fini de solutions dans tout segment $[\alpha, \beta]$ inclus dans I.

I-4. Dans cette question I-4, on adopte $I = [a,b]$, $a < b$.

a) Le sous-espace vectoriel de E engendré par les restrictions à I des applications sinus et cosinus (de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$) est-il acceptable ?

b) Le sous-espace vectoriel de E engendré par les restrictions à I des applications $x \longmapsto 1$ et $x \longmapsto x^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ est-il acceptable ?

.../...

PARTIE II

Dans cette partie, on adopte $I = \mathbb{R}$, et on se propose de trouver tous les sous-espaces vectoriels acceptables F de E vérifiant la condition :

(*) $\forall f \in F \quad , \quad f' \in F.$

II-1. Soit F un sous-espace acceptable de E vérifiant (*).

a) Montrer que tout élément de F est indéfiniment dérivable.

b) Montrer que l'application D_F de F dans F qui à f associe f' est un endomorphisme, et qu'il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ tel que :

$$\forall f \in F, \quad f'' = \lambda f' + \mu f$$

II.2. Déduire de II.1. toutes les solutions. Parmi elles, quelles sont celles pour lesquelles D_F est diagonalisable ?

PARTIE III

L'intervalle I de $\mathbb{R}$ étant initialement quelconque, on considère une bijection continue ϕ de I sur I, et on note C_ϕ l'application de E dans E qui à f associé $f \circ \phi$.

III.1. Montrer que C_ϕ est un automorphisme.

III.2. Dans cette question III.2, on adopte $I = [a,b]$, $a < b$. On se propose d'étudier les valeurs propres de C_ϕ .

III.2.1. Pour $f \in E$, comparer $\sup_{x \in I} |f(\phi(x))|$ et $\sup_{x \in I} |f(x)|$.

En déduire que toute valeur propre de C_ϕ a nécessairement pour module 1.

III.2.2. On se place ici dans le cas où ϕ est strictement croissante.

a) On suppose que C_ϕ admet une valeur propre λ ; on désigne par g un vecteur propre (non nul) associé à λ , et par y un point de I tel que $g(y) \neq 0$.

Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$g(\phi^n(y)) = \lambda^n g(y)$$

En comparant les limites éventuelles des deux membres de l'égalité précédente quand n tend vers $+\infty$, montrer que nécessairement $\lambda = 1$.

b) Montrer que 1 est effectivement valeur propre de C_ϕ .

III.2.3. On se place ici dans le cas où ϕ est strictement décroissante. Montrer que les seules valeurs propres possibles de C_ϕ sont 1 et -1 (il n'est pas demandé de chercher si -1 est effectivement valeur propre).

.../...

III.3. Dans cette question III.3. on adopte encore $I = [a,b]$, $a < b$. On suppose qu'il existe une bijection continue ϕ de I sur I, et un sous-espace vectoriel acceptable F de E tels que F soit stable par C_ϕ (ce qui signifie que $C_\phi(F) \subset F$; on note Γ_ϕ l'endomorphisme de F qui à $f \in F$ associe $f \circ \phi \in F$.

III.3.1. Montrer que ϕ est continûment dérivable. Ce résultat servira en III.3.3. et en III.4.

III.3.2. On se place ici dans le cas où ϕ est strictement croissante.

a) Montrer que Γ_ϕ admet 1 pour valeur propre unique ; en déduire qu'il existe une base (g,h) de F et un $\alpha \in \mathbb{C}$ tels que :

$$g \circ \phi = g \quad \text{et} \quad h \circ \phi = \alpha g + h$$

Exprimer $h \circ \phi^n$, $n \in \mathbb{N}$, sous forme d'une combinaison linéaire de g et de h; en déduire que $\alpha = 0$.

Montrer que $\Gamma_\phi = Id_F$, application identique de F.

b) Montrer que $\phi = Id_I$, application identique de I.

On raisonnera par l'absurde : on supposera qu'il existe $x \in I$ tel que $\phi(x) \neq x$; on en déduira que les éléments de la suite $(\phi^n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ sont tous distincts, et on montrera qu'il existe $y \in I$ tel que $f'(y) = 0$ pour tout $f \in F$.

III.3.3. On se place ici dans le cas où ϕ est strictement décroissante.

a) Montrer que $(\Gamma_\phi)^2 = Id_F$ et que $\phi^2 = Id_I$ (c'est-à-dire que Γ_ϕ et ϕ sont involutifs).

b) Montrer que $\Gamma_\phi \neq Id_F$. On supposera que $\Gamma_\phi = Id_F$; on établira qu'il existe $c \in I$ tel que $\phi(c) = c$ et on montrera que $\phi'(c) = 1$.

c) Quelles sont les valeurs propres de Γ_ϕ ?

III.4. On adopte encore $I = [a,b]$, $a < b$. Soit F l'un des sous-espaces acceptables de E qui ont été mis en évidence en I.4.a. (resp. I.4.b). Trouver toutes les bijections continues ϕ de I sur I telles que F soit stable par C_ϕ ; pour chacune d'elles donner la nature de la représentation graphique.

III.5. Dans cette dernière question on adopte $I = \mathbb{R}$. On désigne par F le sous espace de E qui est engendré par les applications sinus et cosinus (de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$). Est-il acceptable ?

Trouver toutes les bijections continues ϕ de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ telles que F soit stable par C_ϕ. Sont-elles toutes involutives ?

****
**
*